PRIMER NIVEL

XXXVII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Ignacio tiene una hoja de papel. La puede cortar en 6 pedazos o en 8 pedazos, a su elección. Luego, en cada etapa, puede elegir uno de los pedazos existentes y cortarlo en 6 pedazos o cortarlo en 8 pedazos.
a) Decidir si de esta manera Ignacio puede tener, después de alguna etapa, exactamente 24 pedazos de papel.
b) Decidir, si de esta manera Ignacio puede tener, después de alguna etapa, exactamente 32 pedazos de papel.
Si la respuesta es no, explicar por qué y si es sí, indicar cómo debe realizar los cortes.

Problema 2.
En el triángulo isósceles ABC sean D y E puntos en los lados AB y AC, respectivamente, tales que las rectas BE y CD se cortan en F. Además, los triángulos AEB y ADC son iguales y tienen $AD=AE=10$ y $AB=AC=30$.
Calcular $\dfrac{\text{área}(ADFE)}{\text{área}(ABC)}$.

Problema 3.
En el pizarrón están escritos los 18 números enteros desde 1 hasta 18. Determinar la menor cantidad de números que hay que borrar para que entre los números restantes no haya dos tales que su suma sea un cuadrado perfecto.

SEGUNDO NIVEL

XXXVII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Fede debe elegir 50 números enteros distintos, desde 1 hasta 100 inclusive de modo que su suma sea igual a 2900. Determinar cuál es la menor cantidad de números pares que puede haber entre los 50 números que elija Fede.

Problema 2.
Sea n un entero positivo. Se tienen n colores, $n \geq 1$. Cada uno de los números enteros entre 1 y 1000 se quiere pintar con uno de los n colores de modo que cada dos números diferentes, si uno divide al otro tengan colores diferentes. Dar el menor número n para que esto sea posible.

Problema 3.
Sea $ABCD$ un paralelogramo con $A\hat{B}C = 105^\circ$. En el interior del paralelogramo existe un punto E tal que el triángulo BEC es equilátero y $C\hat{E}D = 135^\circ$. Sea K el punto medio del lado AB. Calcular la medida del ángulo $B\hat{K}C$.

TERCER NIVEL

XXXVII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Para todo número entero positivo n, sea $S(n)$ la suma de los dígitos de n. Hallar, si existe, un número entero positivo n de 171 dígitos tal que 7 divide a $S(n)$ y 7 divide a $S(n+1)$.

Problema 2.
Sea $k > 1$ un entero. Determinar el menor entero positivo n tal que algunas casillas de un tablero de $n \times n$ se pueden pintar de negro de modo que en cada fila y en cada columna haya exactamente k casillas negras, y además, las casillas negras no compartan ni un lado ni un vértice con otra casilla negra.
ACLARACIÓN: Hay que responder n en función de k.

Problema 3.
Sea ABC un triángulo isósceles rectángulo con ángulo recto en A. Sean E y F puntos en AB y AC respectivamente tales que $E\widehat{C}B = 30^{\circ}$ y $F\widehat{B}C = 15^{\circ}$. Las rectas CE y BF se cortan en P y la recta AP corta al lado BC en D. Calcular la medida del ángulo $F\widehat{D}C$.

PRIMER NIVEL

XXXVII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
Ana y Beto juegan al siguiente juego. Ana escribe cuatro enteros consecutivos de tres dígitos. Beto elige tres de los cuatro números de Ana y calcula su suma. Si el número que obtiene se puede escribir como producto de tres enteros positivos mayores que 1, gana Beto. En caso contrario, gana Ana. Determinar si Ana puede elegir los cuatro números para ganar con certeza.

Problema 5.
En el pizarrón hay dibujado un polígono de ocho lados. Mili debe escribir un número entero entre 1 y 16, sin repeticiones, en cada uno de sus lados y en cada uno de sus vértices. A continuación, para cada lado, Mili calcula la suma de los números escritos en sus dos vértices más el número escrito en ese lado. Obtiene así 8 resultados. El objetivo es que esos 8 resultados sean iguales entre sí. Denominamos S al número igual al resultado de las 8 sumas. Determinar todos los posibles valores de S y para el menor de ellos, dar una distribución de 16 números en el polígono con los que se obtiene ese valor de S.

Problema 6.
a) Nico debe elegir 10 números enteros positivos (distintos); a continuación, Uriel elige 6 de estos números y los suma. Si el resultado es múltiplo de 6, Uriel gana y si no, pierde. Determinar si Nico puede elegir los 10 números para que a Uriel le sea imposible ganar.
b) Nico debe elegir 11 números enteros positivos (distintos); a continuación, Uriel elige 6 de estos números y los suma. Si el resultado es múltiplo de 6, Uriel gana y si no, pierde. Determinar si Nico puede elegir los 11 números para que a Uriel le sea imposible ganar.
En cada caso, si la respuesta es afirmativa dar un ejemplo y en caso contrario explicar el por qué.

SEGUNDO NIVEL

XXXVII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
Juli tiene un mazo de 54 cartas y le propone a Bruno el siguiente juego. Juli ubica las cartas en una fila, algunas boca arriba y las demás boca abajo. Bruno puede hacer repetidas veces el siguiente movimiento: elige una de las cartas y da vuelta esa carta y sus dos vecinas (las que estaban boca arriba las pone boca abajo y las que estaban boca abajo las pone boca arriba). Bruno gana si mediante este procedimiento logra que todas las cartas queden hacia arriba. En caso contrario gana Juli. Decidir cuál jugador tiene estrategia ganadora y explicarla.
Nota. Cuando Bruno elige la primera o la última carta de la fila, da vuelta solo dos cartas; en todos los otros casos da vuelta tres cartas.

Problema 5.
Alrededor de una circunferencia están escritos 20 números enteros positivos distintos. Alex divide cada número por el número vecino, recorriendo la circunferencia en el sentido de las agujas del reloj, y anota los restos que obtiene en cada caso. Teo divide cada número por el número vecino, recorriendo la circunferencia en el sentido contrario al de las agujas del reloj, y anota los restos. Si, entre los 20 números que anotó, Alex obtuvo sólo dos restos distintos, determinar la cantidad de restos diferentes que obtendrá Teo.

Problema 6.
Hallar todos los enteros $n > 1$ para los que es posible escribir en las casillas de un tablero de $n \times n$ los números enteros desde 1 hasta n^2, sin repeticiones, de modo que en cada fila y en cada columna el promedio de los n números escritos sea un número entero.

TERCER NIVEL

XXXVII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.

Sean a y b números enteros positivos tales que $\frac{5a^4+a^2}{b^4+3b^2+4}$ es un número entero. Demostrar que a no es primo.

Problema 5.

Determinar el mayor valor posible de

$$S = a_1a_2a_3 + a_4a_5a_6 + ... + a_{2017}a_{2018}a_{2019} + a_{2020},$$

donde $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{2020})$ es una permutación de $(1, 2, 3, ..., 2020)$.

***ACLARACIÓN*:** En S, cada término, excepto el último, es la multiplicación de tres números.

Problema 6.

Sea $n \geq 3$ un entero. Lucas y Matías juegan un juego en un polígono regular de n lados con un vértice marcado como *trampa.* Inicialmente Matías ubica una ficha en un vértice del polígono. En cada paso, Lucas dice un entero positivo y Matías mueve la ficha ese número de vértices en sentido horario o en sentido antihorario, a su elección.

a) Determinar todos los $n \geq 3$ tales que Matías puede ubicar la ficha y moverla de modo de no caer nunca en la trampa, independientemente de los números que diga Lucas. Dar la estrategia para Matías.

b) Determinar todos los $n \geq 3$ tales que Lucas puede obligar a Matías a caer en la trampa. Dar la estrategia para Lucas.

Nota. Los dos jugadores conocen el valor de n y ven el polígono.